

Opción A

1.- Resolver: $\int \frac{2x}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx$

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Rightarrow \text{Por Ruffini} \Rightarrow (x-1)(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ & & 1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2+4}{2} = 3 \\ x = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x-3)(x+1)$$

$$\frac{2x}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{2x}{(x-1)(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1} =$$

$$= \frac{A(x-3)(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+1)} \Rightarrow$$

$$A(x-3)(x+1) + B(x-1)(x+1) + C(x-1)(x-3) = 2x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3 \Rightarrow A(3-3)(3+1) + B(3-1)(3+1) + C(3-1)(3-3) = 2 \cdot 3 \Rightarrow 8B = 6 \Rightarrow B = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \\ x = 1 \Rightarrow A(1-3)(1+1) + B(1-1)(1+1) + C(1-1)(1-3) = 2 \cdot 1 \Rightarrow -4A = 2 \Rightarrow A = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \\ x = -1 \Rightarrow A(-1-3)(-1+1) + B(-1-1)(-1+1) + C(-1-1)(-1-3) = 2 \cdot (-1) \Rightarrow 8C = -2 \Rightarrow C = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\frac{2x}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{3}{4}}{x-3} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1}$$

$$I = \int \frac{2x}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} + \frac{3}{4} \int \frac{du}{u} - \frac{1}{4} \int \frac{dr}{r} =$$

$$\begin{cases} x-1 = t \Rightarrow dx = dt \\ x-3 = u \Rightarrow dx = du \\ x+1 = r \Rightarrow dx = dr \end{cases}$$

$$I = \int \frac{2x}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx = -\frac{1}{2} \ln t + \frac{3}{4} \ln u - \frac{1}{4} \ln r = \ln \frac{u^{\frac{3}{4}}}{t^{\frac{1}{2}} \cdot r^{\frac{1}{4}}} = \ln \sqrt[4]{\frac{(x-3)^3}{(x-1)^2(x+1)}} + K$$

2.- La potencia $f(x)$ en vatios consumida por cierto aparato eléctrico, en función de su resistencia (x) en

ohmios viene dada por la expresión $f(x) = \frac{4x}{(x+12)^2}$

Hallar la potencia máxima y el correspondiente valor de x

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 4 \frac{(x+12)^2 - 2(x+12)x}{(x+12)^4} = 4 \frac{(x+12) - 2x}{(x+12)^3} = 4 \frac{12-x}{(x+12)^3} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 12-x = 0 \Rightarrow x = 12$$

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 4 \frac{-(x+12)^3 - 3(x+12)^2(12-x)}{(x+12)^6} = 4 \frac{-(x+12) - 3(12-x)}{(x+12)^4} = 4 \frac{-x-12-36+3x}{(x+12)^4}$$

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 4 \frac{2x-48}{(x+12)^4} \Rightarrow f''(12) = 4 \frac{2 \cdot 12 - 48}{(12+12)^4} = 4 \frac{24-48}{24^4} = 4 \frac{-24}{24^4} = -\frac{4}{24^3} < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

$$\begin{cases} x = 12 \text{ ohmios} \\ f(12) = \frac{4 \cdot 12}{(12+12)^2} = \frac{48}{24^2} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \text{ vatios} \end{cases}$$

3.- Resolver el siguiente sistema matricial $\begin{cases} 2A + 3B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \\ 5A - 2B = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 8 & 18 \end{pmatrix} \end{cases}$

$$\begin{cases} 4A + 6B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \\ 15A - 6B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 8 & 18 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow 19A = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 14 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 3 \\ 24 & 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & 19 \\ 38 & 76 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 38 & 19 \\ 38 & 76 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 10A + 15B = 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \\ -10A + 4B = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 8 & 18 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow 19B = \begin{pmatrix} 20 & 40 \\ 35 & 55 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 2 \\ 16 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 38 \\ 19 & 19 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 38 \\ 19 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.- Estudiar la posición relativa de las rectas r y s . En caso de que se corten en un punto hallar las

$$\text{coordenadas del mismo } r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}, \quad s \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda - 8 \\ z = -\lambda - 1 \end{cases}$$

a) Analizaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, de serlo estudiaremos si tienen punto común si es afirmativo las rectas son coincidentes sino paralelas.

Si no hay igualdad o proporcionalidad buscaremos si tienen un punto común, si eso sucede son rectas secantes o que se cortan en un punto.

De no darse ninguno de los supuestos anteriores las rectas se cruzan

$$\left\{ \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = -2 + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -8 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (-1, 2, 1) \\ \vec{v}_s = (-1, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{-1} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow \text{No son paralelas ni coincidentes}$$

Veamos si tienen un punto P común

$$\begin{cases} 1 - \alpha = -\lambda \\ -2 + 2\alpha = -8 + \lambda \\ \alpha = -1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \alpha = -1 \\ \lambda - 2\alpha = 6 \\ \lambda + \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow 2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow -1 - \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow -1 - 2 \cdot 0 = 6 \Rightarrow$$

$-1 \neq 6 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible} \Rightarrow \text{Las rectas se cruzan}$

Opción B

1.- Para que valor de a la recta $ax + y = \text{Ln}(3)$ es tangente a la curva $f(x) = \text{Ln}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ en el punto de abscisa $x = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x+1}} \cdot \frac{x+1-(x+2)}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+1-x-2}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x+1)(x+2)}$$

$$\begin{cases} f(0) = \text{Ln}\left(\frac{0+2}{0+1}\right) = \text{Ln} 2 \\ m = f'(0) = \frac{-1}{(0+1)(0+2)} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y - \text{Ln} 2 = -\frac{1}{2} \cdot (x-0) \Rightarrow y + \frac{1}{2}x = \text{Ln} 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Supongo que hay un error en el enunciado del problema ya que debía de ser $ax + y = \text{Ln}(2)$

2.- Calcular $\int_0^1 (x^2 + 5)e^{-x} dx$

$$I = \int_0^1 (x^2 + 5)e^{-x} dx = \left[-(x^2 + 5)e^{-x} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 x(-e^{-x}) dx = -\left[(1^2 + 5)e^{-1} - (0^2 + 5)e^0 \right] + 2 \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$\begin{cases} x^2 + 5 = u \Rightarrow 2x dx = du \\ e^{-x} dx = dx \Rightarrow v = \int e^{-x} dx = -\int e^t dt = -e^t = -e^{-x} \\ -x = t \Rightarrow dx = -dt \end{cases} \quad \begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ e^{-x} dx = dx \Rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 (x^2 + 5)e^{-x} dx = -(6e^{-1} - 5 \cdot 1) + 2 \left\{ \left[-xe^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx \right\} = 5 - \frac{6}{e} - 2 \cdot (1 \cdot e^{-1} - 0 \cdot e^0) + 2 \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$I = 5 - \frac{6}{e} - 2 \cdot \left(\frac{1}{e} - 0 \right) + 2 \cdot \left[-e^{-x} \right]_0^1 = 5 - \frac{6}{e} - \frac{2}{e} - 2(e^{-1} - e^0) = 5 - \frac{6}{e} - \frac{2}{e} - 2\left(\frac{1}{e} - 1\right) = 5 - \frac{6}{e} - \frac{2}{e} - \frac{2}{e} + 2 = 7 - \frac{10}{e} = \frac{7e - 10}{e}$$

3.- Hallar el valor de k para que la matriz $\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$

- a) No tenga inversa
b) Tenga rango 3

Para no tener inversa el determinante de la matriz es nulo

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} = (-k) \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -k-4 & -5 & -7 \\ -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} = \\
 &= (-3) \cdot (-k) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k-4 & -5 & -7 \\ -k-4 & -k-5 & -7 \end{vmatrix} = 3k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & k-3 \\ 0 & -1 & k-3 \end{vmatrix} = 3k \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} k-1 & k-3 \\ -1 & k-3 \end{vmatrix} = \\
 &= 3k [(k-1)(k-3) + k-3] = 3k^2 (k-3)(k-1+1) \Rightarrow \text{Si } A=0 \Rightarrow 3k^3 (k-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k^2 = 0 \Rightarrow k = 0 \\ k-3 = 0 \Rightarrow k = 3 \end{cases} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

No tiene inversa para $k = 0$ y $k = 3$

b)

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix} &\equiv \begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -7 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -k-4 & -5 & -7 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -7 \end{pmatrix} \equiv \\
 &\equiv \begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & k-3 \\ 0 & 0 & -1 & k-3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & k-3 \\ 0 & 0 & -k & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\text{Cuando } k = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & k-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3$$

Cuando $k \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 4$

4.- Halla la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $A(0, -1, 0)$ paralelo a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = -t - 3 \end{cases}$$

El vector director del plano buscado π es perpendicular a las dos rectas y lo hallaremos calculando el producto vectorial de los vectores directores de dichas rectas.

Una vez hallado, este vector es perpendicular al vector determinado por el punto A por donde pasa y por el punto G que es el que genera el plano y, debido a ello el producto escalar de ambos es nulo y la ecuación del plano que se pide

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (-1, -1, 0) \equiv (1, 1, 0) \\ \vec{v}_s = (-1, 0, -1) \equiv (1, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{k} - \vec{j} \Rightarrow \vec{v}_\pi = (1, -1, -1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (1, -1, -1) \\ \vec{AG} = (x, y, z) - (0, -1, 0) = (x, y+1, z) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \vec{AG} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{AG} = 0 \Rightarrow$$

$$(1, -1, -1) \cdot (x, y+1, z) = 0 \Rightarrow x - y - 1 - z = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - y - z - 1 = 0$$